

Das komplette Script (19 Seiten, mit Beweisen) kann auf  
<http://gruppentheorie.de/darstellungen3.pdf> eingesehen werden.

Direkte Folgerung aus Schurs Lemma: Für irreduzible  $\mathbb{C}G$ -Moduln  $V, W$  ist

$$\dim(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \begin{cases} 1 & \text{für } V \cong W, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Allgemein für  $\mathbb{C}G$ -Moduln  $V, V_i, W, W_j$ :

$$\dim\left(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}\left(\bigoplus_{i=1}^m V_i, \bigoplus_{j=1}^n W_j\right)\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \dim(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W_j)).$$

**Satz:** Für eine direkte Summe  $\mathbb{C}G = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$  und  $U_i, U$  irreduzibel ist die Anzahl der zu  $U$  isomorphen  $U_i$  gleich  $\dim U$ .

**Definition:** Eine Menge  $V_1, \dots, V_n$  von irreduziblen  $\mathbb{C}G$ -Moduln heißt eine *vollständige Menge paarweise nichtisomorpher  $\mathbb{C}G$ -Moduln*, wenn jeder irreduzible  $\mathbb{C}G$ -Modul zu einem der  $V_i$  isomorph ist, jedoch keine zwei der  $V_1, \dots, V_n$  isomorph sind.

**Theorem:** Für eine vollständige Menge nichtisomorpher  $\mathbb{C}G$ -Moduln  $V_1, \dots, V_n$  gilt

$$\sum_{i=1}^n (\dim V_i)^2 = |G|.$$

**Konjugationsklassen der  $D_n$ :**

$$D_n = \langle d, s \mid d^n = s^2 = 1, dsd = s \rangle = \{1, d, d^2, \dots, d^{n-1}, s, ds, \dots, d^{n-1}s\}$$

**1. Fall:**  $n$  ungerade

$D_n$  hat genau  $\frac{n+3}{2}$  Konjugationsklassen:

$$\{1\}, \{d, d^{-1}\}, \dots, \{d^{\frac{n-1}{2}}, d^{-\frac{n-1}{2}}\}, \{s, ds, \dots, d^{n-1}s\}.$$

**2. Fall:**  $n$  gerade

$D_n$  hat genau  $\frac{n}{2} + 3$  Konjugationsklassen:

$$\{1\}, \{d^{\frac{n}{2}}\}, \{d, d^{-1}\}, \dots, \{d^{\frac{n}{2}-1}, d^{-\frac{n}{2}+1}\}, \\ \{d^{2j}s \mid 0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1\}, \{d^{2j+1}s \mid 0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1\}.$$

### Konjugationsklassen der $S_n$ :

Die Konjugationsklasse  $\pi^{S_n}$  einer Permutation  $\pi \in S_n$  besteht aus allen Permutationen aus  $S_n$  mit der gleichen Zykelstruktur.

Die Anzahl der Konjugationsklassen von  $S_n$  ist gegeben durch die Anzahl der Partitionen von  $n$ .

Anzahl der Permutationen einer Konjugationsklasse:

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^r i^{k_i} k_i!}$$

### Konjugationsklassen der $A_n$ :

Sei  $x \in A_n$ ,  $n > 1$ . Kommutiert  $x$  mit einer ungeraden Permutation in  $S_n$ , dann ist  $x^{A_n} = x^{S_n}$ .

Andernfalls zerfällt  $x^{S_n}$  in zwei Konjugationsklassen von  $A_n$  gleicher Größe mit Repräsentanten  $x$  und  $(12)^{-1}x(12)$ .

Bemerkung: an der Zerlegung von  $x$  in disjunkte Zyklen kann man diese Fälle wie folgt unterscheiden: haben alle Zyklen der Zerlegung ungerade und paarweise verschiedene Länge, dann ist  $x^{A_n} \neq x^{S_n}$ , andernfalls  $x^{A_n} = x^{S_n}$ .

### Das Zentrum einer Gruppenalgebra

$$Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G \mid zr = rz \forall r \in \mathbb{C}G\}$$

**Definition:** Für die verschiedenen Konjugationsklassen  $C_1, \dots, C_n$  der Gruppe  $G$  heißen

$$\bar{C}_i := \sum_{g \in C_i} g \in \mathbb{C}G$$

die *Klassensummen* von  $\mathbb{C}G$ .

**Theorem:** Die Klassensummen  $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_n$  bilden eine Basis von  $Z(\mathbb{C}G)$ .