Aufgabe 33

Voraussetzung: $A, B \in O(2m),\ AB = BA,\ A$ habe keine reellen Eigenwerte
Behauptung: $B \in SO(2m)$
Beweis:

$$\begin{aligned} O(2m) &= \{A \in GL(2m) \mid A^t A = E_{2m}\} \\ SO(2m) &= \{A \in O(2m) \mid \det A = 1\} \end{aligned}$$

A hat keine reellen Eigenwerte $\Rightarrow A \in SO(2m)\backslash\{\pm E_{2m}\}$

$AB = BA \Rightarrow \exists\, C \in O(2m)$ mit

$$C^{-1}AC = [A_1, \dots, A_m], \quad C^{-1}BC = [B_1, \dots, B_m]$$

mit $A_i, B_i \in O(2)$

$$\Rightarrow A_i B_i = B_i A_i, \quad A_i \in SO(2)\backslash\{\pm E_{2m}\}$$

$$\Rightarrow B_i \in SO(2)$$

$$\Rightarrow B \in SO(2m) \ \blacksquare$$

Aufgabe 34

i) $Z(U(n)) = \{zE,\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$

$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}),\ \overline{A}^t A = E\}$

„ $\supset$ “ :

$$A \in \{zE,\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\},\ B \in U(n)$$

$$\Rightarrow AB = zEB = zB,\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1,$$

$$BA = BzE = zB,\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1,$$

$$\Rightarrow AB = BA$$

$$\Rightarrow A \in Z(U(n))$$

„ $\subset$ “ :

$$A \in Z(U(n))$$

$$\Rightarrow A \in T(U(n)) \quad \text{(wegen } Z(U(n)) \subset T(U(n))\text{)}$$

$$T(U(n)) = \{[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \,:\, \alpha_i \in S^1\}$$

$$\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C} \text{ mit } A = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$$

Damit $A \in \{zE,\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ zeige ich $\alpha_i = \alpha_j\ \forall\, i, j$:
Sei $i \neq j$:

$$B := E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} - E_{ji} \in U(n)$$

$$\Rightarrow AB = BA \quad \text{(wegen } A \in Z(U(n))\text{)}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \alpha_j\ \forall\, i, j$$

$$\Rightarrow A = zE,\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1 \ \blacksquare$$

ii) $Z(SU(n)) = \{zE,\ z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$

$SU(n) = \{A \in U(n),\ \det A = 1\}$

„ $\supset$ “ :

$$A \in \{zE,\ z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\},\ B \in SU(n)$$

$$\Rightarrow AB = zEB = zB,\ z \in \mathbb{C},\ z^n = 1,$$

$$BA = BzE = zB,\ z \in \mathbb{C},\ z^n = 1,$$

$$\Rightarrow AB = BA$$

$$\Rightarrow A \in Z(SU(n))$$

„ $\subset$ “ :

$$A \in Z(SU(n))$$

$$\Rightarrow A \in T(SU(n)) \ \ (\text{wegen } Z(SU(n)) \subset T(SU(n)))$$

$$T(SU(n)) = T(U(n)) \cap SU(n) = \{[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \, : \, \alpha_i \in S^1\} \cap SU(n)$$

$$\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C} \text{ mit } A = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$$

Damit $A \in \{zE,\ z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$ zeige ich wieder $\alpha_i = \alpha_j\ \forall\, i, j$:
Sei $i \neq j$:

$$B := E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} - E_{ji} \in SU(n)$$

$$\Rightarrow AB = BA \ \ (\text{wegen } A \in Z(SU(n))$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \alpha_j\ \forall\, i, j$$

$$\Rightarrow A = zE,\ z \in \mathbb{C},\ z^n = 1 \text{ (wg. } \det A = 1) \ \blacksquare$$

iii) $Z(SO(2m+1)) = \{E\}$

$$\begin{aligned} SO(2m+1) \quad &= \{A \in O(2m+1),\ \det A = 1\} \\ &= \{A \in GL(2m+1,\mathbb{R})\ :\ A^tA = E,\ \det A = 1\} \end{aligned}$$

„ $\supset$ “ :

$$A \in \{E\} \Leftrightarrow A = E, \quad B \in SO(2m+1)$$
$$\Rightarrow AB = EB = B,$$
$$BA = BE = B,$$
$$\Rightarrow AB = BA$$
$$\Rightarrow A \in Z(SO(2m+1))$$

„ $\subset$ “ :

$$A \in Z(SO(2m+1))$$
$$\Rightarrow A \in T(SO(2m+1)) \quad (\text{wegen } Z(SO(2m+1)) \subset T(SO(2m+1)))$$
$$T(SO(2m+1)) = \{R(t_1),\ldots,R(t_m),1]\ :\ t_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{mit } R(t_i) = \begin{pmatrix} \cos t_i & \text{-}\sin t_i \\ \sin t_i & \cos t_i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \exists\, t_1,\ldots,t_m \in \mathbb{R} \text{ mit } A = [R(t_1),\ldots,R(t_m),1]$$

Zum Beweis $A = E$ zeige ich die Gleichheit der Diagonalelemente:

$$\text{Sei } B := [E_2,\ldots,E_2,1] \in SO(2m+1)$$
$$\Rightarrow AB = BA \quad (\text{wegen } A \in Z(SO(2m+1))$$
$$\Rightarrow R(t_i) = R(t_j)\ \forall\, i,j$$

$$C := \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ \text{-}1 & & & \\ & & & E \end{pmatrix} \in SO(2m+1)$$
$$\Rightarrow AC = CA \quad (\text{wegen } A \in Z(SO(2m+1))$$
$$\Rightarrow \sin t_1 = 0 \Rightarrow \cos t_1 = \pm 1,$$
$$\Rightarrow A := [\pm E_2,\ldots,\pm E_2,1] \in SO(2m+1)$$

Aus der Vertauschbarkeit mit B wie oben folgt dann die Gleichheit aller Diagonalelemente: $\Rightarrow A = E$. ■

Aufgabe 35

gegeben: V sei ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\dim V = m$
h eine nicht ausgeartete symmetrische Form auf V,
$U(V,h)$ die zugehörige unitäre Gruppe.

Für $a \in V$ mit $h(a,a) \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$:

$$\sigma_{a,\alpha}(x) := x - (\alpha+1)\frac{h(a,x)a}{h(a,a)} \quad \text{für } x \in V$$

zu a)

$$\begin{aligned}\sigma_{a,\alpha}(a) &= a - (\alpha+1)\tfrac{h(a,a)a}{h(a,a)}\\ &= a - (\alpha+1)a\\ &= a - \alpha a - a\\ &= -\alpha a\end{aligned}$$

$x \in (\mathbb{C}a)^{\perp} \Rightarrow h(a,x) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sigma_{a,\alpha}(x) &= x - (\alpha+1)\tfrac{0\cdot a}{h(a,a)}\\ &= x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{a,-1}(x) &= x - (-1+1)\tfrac{h(a,x)a}{h(a,a)}\\ &= x - 0\cdot\tfrac{h(a,x)a}{h(a,a)}\\ &= x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_{a,-1} = \mathrm{id}$$

$\sigma_{a,\alpha}$ ist bijektiv, linear wegen Definition und der Linearität der symmetrischen Form h.

$$\begin{aligned} h(\sigma_{a,\alpha}(x), \sigma_{a,\alpha}(y)) &= h(x - (\alpha+1)\frac{h(a,x)a}{h(a,a)}, y - (\alpha+1)\frac{h(a,y)a}{h(a,a)}) \\ &= h(x,y) + h(-(\alpha+1)\frac{h(a,x)a}{h(a,a)}, -(\alpha+1)\frac{h(a,y)a}{h(a,a)}) \\ &= h(x,y) - (\alpha+1)h(\frac{h(a,x)a}{h(a,a)}, \frac{h(a,y)a}{h(a,a)}) \\ &= h(x,y) - (\alpha+1)\frac{a}{h(a,a)}h(h(a,x), h(a,y)) \\ &= h(x,y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_{a,\alpha} \in U(V,h)$$

zu Aufgabe 35 a)

$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

$\mathcal{H}^{**} := \mathcal{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Betrachtet wird die Operation:

$$G \times \mathcal{H}^{**} \to \mathcal{H}^{**}$$

$G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist klar aus Aufgabe 6, ist transitiv.
$G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittels gleicher Transformation ist auch transitiv.
Weiterhin setze $G \times \{\infty\} \to \{0\},\ G \times \{0\} \to \{\infty\}$.

Damit ist die Operation von G auf $\mathcal{H}$ zu einer Operation von G auf $\mathcal{H}^{**}$ erweitert.