Aufgabe 37

a)

gegeben: W sei ein K-Vektorraum, W^* sein Dualraum
gesucht: kanonische symplektische Form auf $W^* \oplus W$

Lösung:

Bezeichne X den Raum $W^* \oplus W$. Dann definiere ich die symplektische Form

$$\omega : X \times X \to K$$

wie folgt:

$$\omega\big((w_1', w_1), (w_2', w_2)\big) := w_2'(w_1) - w_1'(w_2)$$

bzw. in anderer Schreibweise:

$$\omega\big((w_1', w_1), (w_2', w_2)\big) := < w_2', w_1 >_{W^*,W} - < w_1', w_2 >_{W^*,W}$$

für $w_1, w_2 \in W,\ w_1', w_2' \in W^*$.

Ich zeige, daß das so definierte ω eine schiefsymmetrische Linearform ist.

Linearität ersten Argument:

$$\begin{aligned}
\omega\big((w_1', w_1) + (w', w), (w_2', w_2)\big) &= \omega\big((w_1' + w', w_1 + w), (w_2', w_2)\big) \\
&= w_2'(w_1 + w) - (w_1' + w')(w_2) \\
&= w_2'w_1 + w_2'w - w_1'(w_2) - w'(w_2) \\
&= w_2'w_1 - w_1'(w_2) + w_2'w - w'(w_2) \\
&= \omega\big((w_1', w_1), (w_2', w_2) + \omega\big(((w', w), (w_2', w_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega\big(\lambda(w_1', w_1), (w_2', w_2)\big) &= \omega\big((\lambda w_1', \lambda w_1), (w_2', w_2)\big) \\
&= w_2'(\lambda w_1) - (\lambda w_1')(w_2) \\
&= \lambda w_2'(w_1) - \lambda w_1'(w_2) \\
&= \lambda\big(w_2'(w_1) - w_1'(w_2)\big) \\
&= \lambda\omega\big((w_1', w_1), (w_2', w_2)\big)
\end{aligned}$$

Schiefsymmetrie:

$$\begin{aligned}\omega\big((w_1', w_1), (w_2', w_2)\big) &= w_2'(w_1) - w_1'(w_2) \\ &= -\big(w_1'(w_2) - w_2'(w_1)\big) \\ &= -\omega\big((w_2', w_2), (w_1', w_1)\big)\end{aligned}$$

Die Linearität im zweiten Argument ergibt sich natürlich aus der Schiefsymmetrie.
Damit ist durch ω eine symplektische Form auf $W^* \oplus W$ definiert.

b)

Voraussetzungen: $M \in Sp_{2n}(K)$, λ Eigenwert von M mit Vielfachheit k
zu zeigen: $\frac{1}{\lambda}$ ist auch Eigenwert von M mit der Vielfachheit k

Beweis:

$$\mathrm{Sp}_{2n}(K) = \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(K) : M^t J M = J\} \quad \text{mit } J = \begin{pmatrix} & E \\ -E & \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M \in Sp_{2n}(K) &\Rightarrow M^{-1} \in Sp_{2n}(K) \\ M^t J M = J &\Rightarrow M^{-1} J^{-1} M^{t^{-1}} = J^{-1} \\ &\Rightarrow M^{-1} J^{-1} = J^{-1} M^t \\ &\Rightarrow M^{-1} = J^{-1} M^t J \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(\lambda E - M^{-1}) &= \det(\lambda E - J^{-1} M^t J) \\ &= \det(\lambda E - M^t) \\ &= \det(\lambda E - M)\end{aligned}$$

Ist λ ein Eigenwert von M mit der Vielfachheit k, dann ist (aus Linearer Algebra bekannt) $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von M^{-1} mit der Vielfachheit k. Aus obenstehender Gleichung folgt, daß also $\frac{1}{\lambda}$ auch ein Eigenwert von M mit der Vielfachheit k ist. ■

Aufgabe 38

Voraussetzungen: (V, ω) normierter symplektischer Vektorraum,
$\phi : V \to V$ symplektische Abbildung.

Definition: ϕ heißt *stabil*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \vartheta > 0 : ||\phi^N v|| < \varepsilon \; \forall N \in \mathbb{N} \text{ und } ||v|| < \vartheta.$$

a) zu zeigen: Hat $\phi \in \mathrm{Sp}V$ einen Eigenwert λ mit $|\lambda| \neq 1$, ist ϕ nicht stabil.

Beweis:

Nach Aufgabe 37 b) besitzt ϕ auch den Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$. Wegen $|\lambda| \neq 1$ ist $|\lambda| > 1$ oder $|\frac{1}{\lambda}| > 1$.
ϕ besitzt also einen Eigenwert μ mit $|\mu| > 1$.

$$\Rightarrow \exists\, w \in V,\; w \neq 0 : \phi(w) = \mu w.$$

$$\Rightarrow ||\phi(w)|| = ||\mu w|| = |\mu|\, ||w|| > ||w|| \tag{1}$$

Angenommen, ϕ wäre stabil, und es gäbe also ein ϑ, was die Bedingung erfüllt:

$$||\phi^N v|| < \varepsilon \;\forall N \in \mathbb{N},\; ||v|| < \vartheta,\; \varepsilon > 0.$$

Setze $v := \alpha\vartheta \frac{w}{||w||}$ mit $0 < \alpha < 1$, dann ist

$$||v|| = \big|\big|\alpha\vartheta \frac{w}{||w||}\big|\big| = \alpha\vartheta \big|\big|\frac{w}{||w||}\big|\big| = \alpha\vartheta < \vartheta, \tag{2}$$

für dieses v gilt nach der Annahme:

$$||\phi^N v|| < \varepsilon \;\forall N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0.$$

Nun ist

$$||\phi(v)|| = \left|\left|\phi\left(\alpha\vartheta \frac{w}{||w||}\right)\right|\right| = \alpha\vartheta \frac{||\phi(w)||}{||w||} > \alpha\vartheta \quad \text{nach (1).} \tag{3}$$

$\forall\, \alpha : 0 < \alpha < 1$ gilt für diese v also nach (2) und (3)

$$||\phi(v)|| > ||v|| \text{ und } ||\phi(v)|| < \vartheta.$$

Für $\varepsilon < \vartheta$ erhalte ich einen Widerspruch zur Annahme, wenn ich α so wähle, daß $||v|| = \varepsilon$.

Aufgabe 39

Nach Definition:

$$\mathrm{U}(n) = \{U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),\ \overline{U}^t U = E_n\}$$

Zerlegung in Realteil und Imaginärteil:

$$U \in \mathrm{U}(n),\ U = (x_{ij} + iy_{ij}),\ x, y \in \mathbb{R}$$

$$U = X + iY,\ X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

$$\overline{U} = X - iY$$

$$\overline{U}^t = (X - iY)^t = X^t - (iY)^t = X^t - iY^t$$

$$\overline{U}^t U = (X^t - iY^t)(X + iY) = X^t(X + iY) - iY^t(X + iY)$$

$$= X^t X + iX^t Y - iY^t X + Y^t Y = X^t X + Y^t Y + i(X^t Y - Y^t X) = E_n$$

Bedingungen an X und Y:

$$X^t Y - Y^t X = 0, \tag{4}$$

$$X^t X + Y^t Y = E_n \tag{5}$$

$\mathrm{SO}(2n) = \{A \in \mathrm{GL}(2n) \,|\, A^t A = E_{2n} \wedge \det A = 1\}$

$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(2n) : A^t J_{2n} A = J_{2n}\}$ mit $J_{2n} = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}$

Ich ordne einer Matrix $\mathrm{U}(n) \ni X + iY$ die Matrix $A \in \mathrm{GL}(2n)$ zu mittels:

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Dann ist:

$$A^tA = \begin{pmatrix} X^t & -Y^t \\ Y^t & X^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^tX + Y^tY & X^tY - Y^tX \\ Y^tX - X^tY & Y^tY + X^tX \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\det A = X^2 + Y^2 \tag{8}$$

$$A^tJ_{2n}A = \begin{pmatrix} X^t & -Y^t \\ Y^t & X^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Y^t & X^t \\ -X^t & Y^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^tX - X^tY & Y^tY + X^tX \\ -X^tX - Y^tY & -X^tY + Y^tX \end{pmatrix}$$

$$A^tJ_{2n}A = \begin{pmatrix} Y^tX - X^tY & Y^tY + X^tX \\ -(X^tX + Y^tY) & Y^tX - X^tY \end{pmatrix} \tag{9}$$

Sei nun $U \in \mathrm{U}(n)$, dann wird wegen (5) und (6) in (7)

$$A^tA = \begin{pmatrix} E_n & \\ & E_n \end{pmatrix} = E_{2n},$$

$\det A = 1$, also $A \in \mathrm{SO}(2n)$.

Wegen (5) und (6) wird in (9)

$$A^tJ_{2n}A = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} = J_{2n},$$

also $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, und wir haben $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}(2n)$.

Sei umgekehrt $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}(2n)$, dann hat A auch eine solche Darstellung, siehe *Hein* S. 52, 84, mit $A^tA = E_{2n}$, $\det A = 1$, $A^tJ_{2n}A = J_{2n}$, dann folgt damit aus (7) und (9) $U^tU = E_n$ (siehe Berechnung für (4) und (5)) und damit $U = X + iY \in \mathrm{U}(n)$.

Der gefragte Isomorphismus ist die Abbildung

$$U(n) \ni U = X + iY \to \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}(2n).$$

Die Wohldefiniertheit wurde gezeigt, die Injektivität ist offensichtlich, und die Surjektivität folgt aus obigen Darstellungen.

Aufgabe 40

Definition: Für $X \in M_n(K)$ wird

$$\operatorname{ad} X : M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$$

definiert durch

$$(\operatorname{ad} X)(Y) = [X, Y] = XY - YX.$$

zu zeigen:

a) $$(\operatorname{ad} X)^k(Y) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} X^{k-l} Y X^l \quad (k \in \mathbb{N})$$

b) $$\big(\exp(\operatorname{ad} X)\big)(Y) = (\exp X) Y (\exp X)^{-1}$$

Beweis:

a) Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Sei $k = 1$. Die Behauptung erhält für $k = 1$ die Gestalt:

$$(\operatorname{ad} X)^1(Y) = \sum_{l=0}^{1} (-1)^l \binom{1}{l} X^{1-l} Y X^l$$

gleichbedeutend mit

$$\operatorname{ad} X(Y) = (-1)^0 \binom{1}{0} X^1 Y X^0 + (-1)^1 \binom{1}{1} X^0 Y X^1$$

äquivalent zu

$$\operatorname{ad} X(Y) = XY - YX,$$

der Definition von ad. Die Behauptung gilt also für $k = 1$.

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für ein $k \in \mathbb{N}$. Es wird nachgewiesen, daß sie dann auch für $k+1$ richtig ist.

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{ad} X)^{k+1}(Y) &= (\operatorname{ad} X)(\operatorname{ad} X)^k(Y) \\
&= (\operatorname{ad} X)\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}X^{k-l}YX^l \quad \text{(nach Induktionsannahme)} \\
&= [X, \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}X^{k-l}YX^l] \qquad \text{(nach Definition ad)} \\
&= X\left(\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}X^{k-l}YX^l\right) - \left(\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}X^{k-l}YX^l\right)X \\
&= \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}X^{k-l+1}YX^l - \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}X^{k-l}YX^{l+1} \\
&= \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}X^{k-l+1}YX^l - \sum_{l=1}^{k+1}(-1)^{l-1}\binom{k}{l-1}X^{k-l+1}YX^l \\
&= \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}X^{k-l+1}YX^l + \sum_{l=1}^{k+1}(-1)^{l}\binom{k}{l-1}X^{k-l+1}YX^l \\
&= \binom{k}{0}X^{k+1}Y + \sum_{l=1}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}X^{k-l+1}YX^l + \sum_{l=1}^{k}(-1)^{l}\binom{k}{l-1}X^{k-l+1}YX^l \\
&\qquad + (-1)^{k+1}\binom{k}{k}YX^{k+1} \\
&= X^{k+1}Y + \sum_{l=1}^{k}(-1)^l\left(\binom{k}{l} + \binom{k}{l-1}\right)X^{k-l+1}YX^l + (-1)^{k+1}YX^{k+1} \\
&= X^{k+1}Y + \sum_{l=1}^{k}(-1)^l\binom{k+1}{l}X^{k-l+1}YX^l + (-1)^{k+1}YX^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0}X^{k-0+1}YX^0 + \sum_{l=1}^{k}(-1)^l\binom{k+1}{l}X^{k-l+1}YX^l \\
&\qquad + (-1)^{k+1}\binom{k+1}{k+1}X^{k-(k+1)+1}YX^{k+1} \\
&= \sum_{l=0}^{k+1}(-1)^l\binom{k+1}{l}X^{k-l+1}YX^l \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

b)

$$\begin{aligned}
\big(\exp(\operatorname{ad} X)\big)(Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\operatorname{ad} X)^k (Y) && \text{(nach Definition der Abbildung exp)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} X^{k-l} Y X^l && \text{(nach der Eigenschaft a))} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{k!}{l!(k-l)!} X^{k-l} Y X^l \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{1}{l!(k-l)!} X^{k-l} Y X^l \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!(k-l)!} X^{k-l} Y (-X)^l \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{X^{k-l}}{(k-l)!} Y \frac{(-X)^l}{l!} && \text{(dies ist ein Cauchy-Produkt)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} Y \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-X)^l}{l!} && \text{(absolut konvergente Reihen)} \\
&= (\exp X) Y (\exp(-X)) \\
&= (\exp X) Y (\exp X)^{-1} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$