

Aufgabe 41

$$J = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}, \quad S_A = \begin{pmatrix} A & \\ & {}^t A^{-1} \end{pmatrix}, \quad T_B = \begin{pmatrix} E_n & B \\ & E_n \end{pmatrix},$$

mit $A \in \mathrm{GL}(n, K)$, $B \in \mathrm{Sym}_n(K)$, d.h. $B = {}^t B$.

zu zeigen: J, S_A und T_B erzeugen $\mathrm{Sp}(2n, K)$.

Beweis:

Ich zeige, daß ich eine beliebige Matrix $M \in \mathrm{Sp}(2n, K)$ durch Multiplikation mit den obenstehenden erzeugenden Standardmatrizen in eine dieser Standardmatrizen, nämlich T_B , umwandeln kann. Der Rückschluß zeigt dann, daß alle Matrizen aus $\mathrm{Sp}(2n, K)$ durch Multiplikation von diesen Standardmatrizen erzeugt werden.

Sei also $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, K)$.

Aus der definierenden Bedingung für $\mathrm{Sp}(2n, K)$ folgen die auch bereits aus der Vorlesung bekannten Bedingungen an A, B, C, D :

$${}^t A D - {}^t C B = E_n, \quad {}^t A C - {}^t C A = 0, \quad {}^t B D - {}^t D B = 0. \quad (1)$$

Ich multipliziere zuerst M von links mit einem S_V und von rechts mit einem $S_{V'}$, und erhalte

$$\begin{aligned} S_V M S_{V'} &= \begin{pmatrix} V & \\ & {}^t V^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V' & \\ & {}^t V'^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V A & V B \\ {}^t V^{-1} C & {}^t V^{-1} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V' & \\ & {}^t V'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V A V' & V B {}^t V'^{-1} \\ {}^t V^{-1} C V' & {}^t V^{-1} D {}^t V'^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es wurde bereits in der Aufgabenstellung darauf hingewiesen, daß ein Resultat der Linearen Algebra besagt, daß man durch geeignete Wahl von V und V' erreichen kann, daß das Produkt VAV' eine Diagonalmatrix $D_p, p \leq n$, wird, also eine Diagonalmatrix der Form

$$VAV' = \begin{pmatrix} E_p & \\ & \end{pmatrix}.$$

Ich gehe nun davon aus, daß ich M mit solchen geeigneten Matrizen S_V und $S_{V'}$ multipliziert habe, und untersuche nun nur noch Matrizen M mit dieser Gestalt, wo die Teilmatrix A bereits die Form D_p hat.

Ich unterteile M nun noch feiner:

$$M = \begin{pmatrix} E_p & & B_{11} & B_{12} \\ & & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}.$$

Hierbei sollen die Teilmatrizen B_{11}, C_{11}, D_{11} auch $p \times p$ -Matrizen sein, die anderen Teilmatrizen haben entsprechende Größe.

Aus (1) folgt sofort, daß C_{11} symmetrisch sein muß: $C_{11} = {}^t C_{11}$, und weiterhin $C_{12} = 0$. Es muß $\det C_{22} \neq 0$ sein, sonst hätten wir linear abhängige Spalten und $\det M = 0$, dann könnte M aber nicht die Bedingungsgleichung erfüllen, $M \notin \text{Sp}(2n, K)$.

Jetzt multipliziere ich M von links mit $T_{\alpha E_n}$:

$$MT_{\alpha E_n} = \begin{pmatrix} E_n & \alpha E_n \\ & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

ich betrachte nur die linke obere Blockmatrix: A wird zu $A + \alpha C$, somit

$$A + \alpha C = \begin{pmatrix} E_p + \alpha C_{11} & \\ \alpha C_{21} & \alpha C_{22} \end{pmatrix},$$

und ich kann den Parameter α so wählen, daß $\det(A + \alpha C) \neq 0$.

Dank dieser Umformungen kann ich nun o.B.d.A. $\det A \neq 0$ voraussetzen, und ich kann mittels der anfänglich gezeigten Anmultiplikation $p = n$ erreichen, also $A = E_n$ erreichen.

C ist dann wegen (1) symmetrisch.

Ich multipliziere von links mit

$$\begin{aligned} J^{-1}T_C J &= \begin{pmatrix} & -E_n \\ E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & C \\ & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & -E_n \\ E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & \\ -C & E_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und erhalte

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_n & \\ -C & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_n & \\ -C & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_n & B \\ 0 & D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus (1) (erste Gleichung) erhalte ich $D = E_n$ und aus der dritten Gleichung in (1) ergibt sich die Symmetrie von B : $B = {}^t B$.

Nun haben wir also aus einer beliebigen Matrix $M \in \mathrm{Sp}(2n, K)$ eine Matrix T_B konstruiert, die zu den erzeugenden Matrizen gehört, indem wir stets nur mit den Standardmatrizen multipliziert haben.

Damit ist nachgewiesen, daß $\mathrm{Sp}(2n, K)$ von den angegebenen Matrizen J, S_A und T_B erzeugt wird. ■

Aufgabe 42

$$\mathfrak{H}_n := \{Z \in M_n(\mathbb{C}), Z = {}^t Z, \text{Im}Z \text{ positiv definit}\}$$

$$G = \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \left\{g \in \text{GL}(2n, \mathbb{R}) : {}^t g \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}\right\}$$

Es ist eine Abbildung definiert:

$$\left(g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, Z\right) \mapsto (AZ + B)(CZ + D)^{-1} =: g(Z).$$

Zu zeigen ist, daß diese Abbildung eine Operation auf \mathfrak{H}_n ist.

Sei also $Z \in \mathfrak{H}_n$, bezeichne $Z^* := {}^t \bar{Z}$. Ich benutze die Schreibweise $M > 0$ für M positiv definit, dies sollte zu keinen Verwechslungen führen, sofern ich diese Schreibweise auf Matrizen beziehe.

Sei also $Z \in \mathfrak{H}_n$, dann muß Z symmetrisch sein:

$$Z = {}^t Z \Leftrightarrow {}^t Z - Z = 0 \Leftrightarrow ({}^t Z \ E_n) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} = 0. \quad (2)$$

Außerdem muß $\text{Im}(Z)$ positiv definit sein, das bedeutet

$$\begin{aligned} \text{Im}(Z) > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i}(Z - Z^*) > 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2i}(Z^* \ E_n) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Sei nun $g(Z) := EF^{-1}$, also $E := AZ + B$ und $F := CZ + D$ bzw. schreibe ich

$$g \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AZ + B \\ CZ + D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \quad (4)$$

Dann ist nach (4) und (2) und wegen $g \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} ({}^t E \ {}^t F) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} &= ({}^t Z \ E_n) {}^t g \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} = \\ &= ({}^t Z \ E_n) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Weiterhin ist auch nach (4) und (3) und wegen $g \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$

$$-\frac{1}{2i}(E^* F^*) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = -\frac{1}{2i}(Z^* E_n)^t g \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{2i}(Z^* E_n) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ E_n \end{pmatrix} > 0. \quad (6)$$

Ich multipliziere (5) links aus:

$$0 = ({}^t E \ {}^t F) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = ({}^t E \ {}^t F) \begin{pmatrix} F \\ -E \end{pmatrix} = {}^t E F - {}^t F E$$

$$\Rightarrow {}^t E F = {}^t F E. \quad (7)$$

Nun multipliziere ich (6) links aus:

$$-\frac{1}{2i}(E^* F^*) \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = -\frac{1}{2i}(E^* F^*) \begin{pmatrix} F \\ -E \end{pmatrix} = -\frac{1}{2i}(E^* F - F^* E)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2i}(E^* F - F^* E) > 0 \quad (8)$$

Ich muß zeigen, daß $CZ + D = F$ invertierbar ist. Angenommen, v wäre eine Lösung der Gleichung $Fv = 0$

$$\Rightarrow v^* F^* = 0 \Rightarrow v^*(E^* F - F^* E)v = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow F \text{ ist invertierbar.}$$

Aus (7) folgt, daß EF^{-1} symmetrisch ist, und aus (8) erhalte ich

$$-\frac{1}{2i}F^*((F^{-1})^*E^* - EF^{-1})F > 0,$$

$$-\frac{1}{2i}(EF^{-1} - (EF^{-1})^*) > 0$$

$\Rightarrow \Im(EF^{-1})$ ist positiv definit.

Damit ist nachgewiesen, daß das Bild der gegebenen Abbildung wieder in \mathfrak{H}_n liegt.

Die Wirkung des Einselementes von $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ auf ein Element $Z \in \mathfrak{H}_n$:

$$E_{2n}(Z) = \begin{pmatrix} E_n & \\ & E_n \end{pmatrix} (Z) = (E_n Z + 0)(0Z + E_n)^{-1} = Z.$$

Seien $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}), Z \in \mathfrak{H}_n$:

$$\begin{aligned} g(h(Z)) &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} (Z) \right) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} ((A'Z+B')(C'Z+D')^{-1}) \\ &= (A(A'Z+B')(C'Z+D')^{-1} + B)(C(A'Z+B')(C'Z+D')^{-1} + D)^{-1} \\ &= (A(A'Z+B') + B(C'Z+D'))(C'Z+D')^{-1} (C(A'Z+B')(C'Z+D')^{-1} + D)^{-1} \\ &= (A(A'Z+B') + B(C'Z+D'))(C'Z+D')^{-1} ((C(A'Z+B') + D(C'Z+D'))(C'Z+D')^{-1})^{-1} \\ &= (A(A'Z+B') + B(C'Z+D'))(C'Z+D')^{-1} (C'Z+D') (C(A'Z+B') + D(C'Z+D'))^{-1} \\ &= (A(A'Z+B') + B(C'Z+D'))(C(A'Z+B') + D(C'Z+D'))^{-1} \\ &= ((AA' + BC')Z + AB' + BD')(C(A'Z+B') + D(C'Z+D'))^{-1} \\ &= ((AA' + BC')Z + AB' + BD')((CA' + DC')Z + CB' + DD')^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} (Z) \\ &= \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \right) (Z) \\ &= (gh)(Z). \end{aligned}$$

Es ist gezeigt, daß durch die gegebene Abbildung eine Operation auf \mathfrak{H}_n definiert wird. ■

Aufgabe 43

a) zu zeigen: $SU(1, 1) \simeq SL(2, \mathbb{R})$

Definition:

$$SU(1, 1) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : {}^t\bar{A}D_{1,1}A = D_{1,1} \wedge \det A = 1\}$$

mit

$$D_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_2(\mathbb{C}) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(1, 1) \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ \bar{b} & -\bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{a}a - \bar{c}c & \bar{a}b - \bar{c}d \\ \bar{b}a - \bar{d}c & \bar{b}b - \bar{d}d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} |a|^2 - |c|^2 & \bar{a}b - \bar{c}d \\ \bar{a}b - \bar{c}d & |b|^2 - |d|^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Ich entnehme aus (9) die Bedingung

$$0 = \bar{a}b - \bar{c}d = a(\bar{a}b - \bar{c}d) = |a|^2b - \bar{c}ad = |a|^2b - \bar{c}(1 + ac)$$

(wegen $\det A = ad - bc = 1$)

$$= (|a|^2 - |c|^2)b - \bar{c} = b - \bar{c} \quad (\text{wegen (9)})$$

$$\Rightarrow b = \bar{c} \quad (10)$$

Analog wieder aus (9), diesmal multipliziere ich mit c :

$$0 = \bar{a}b - \bar{c}d = c(\bar{a}b - \bar{c}d) = \bar{a}bc - |c|^2d = \bar{a}(ad - 1) - |c|^2d$$

(wegen $\det A = ad - bc = 1$)

$$= (|a|^2 - |c|^2)d - \bar{a} = d - \bar{a} \quad (\text{wegen (9)})$$

$$\Rightarrow d = \bar{a} \quad (11)$$

Aus (10) und (11) erhalte ich

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{SU}(1, 1) = \left\{ A \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) : A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \wedge |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} \quad (12)$$

Nun zeige ich die Isomorphie von $\text{SU}(1, 1)$ und $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, dazu zeige ich zunächst einen Homomorphismus:

$$\phi : \text{SU}(1, 1) \longrightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$$

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

Als Konjugation ist ϕ ein Homomorphismus. $A \in \text{SU}(1, 1) \Rightarrow \det(A) = 1 \Rightarrow \det \phi(A) = 1$, denn $\det(\cdot)$ ist invariant unter Konjugation. Es verbleibt zu zeigen, daß die Elemente der Matrix $\phi(A)$ reell sind. Ich verwende dafür die in (12) gewonnene Darstellung:

$$\begin{aligned} \phi(A) &= \phi \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} (a + \bar{b})i & (b + \bar{a})i \\ \bar{b} - a & \bar{a} - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} (a + \bar{b})i + (b + \bar{a})i & a + \bar{b} - b - \bar{a} \\ \bar{b} - a + \bar{a} - b & (\bar{a} - b)i - (\bar{b} - a)i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} (a + \bar{a} + b + \bar{b})i & a - \bar{a} - (b - \bar{b}) \\ \bar{b} - a + \bar{a} - b & (a + \bar{a} - b - \bar{b})i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{a+\bar{a}}{2} + \frac{b+\bar{b}}{2} & \frac{a-\bar{a}}{2i} - \frac{b-\bar{b}}{2i} \\ -\frac{a-\bar{a}}{2i} - \frac{b-\bar{b}}{2i} & \frac{a+\bar{a}}{2} - \frac{b+\bar{b}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a) + \operatorname{Re}(b) & \operatorname{Im}(a) - \operatorname{Im}(b) \\ -\operatorname{Im}(a) - \operatorname{Im}(b) & \operatorname{Re}(a) - \operatorname{Re}(b) \end{pmatrix} \tag{13}
\end{aligned}$$

Die Matrix $\phi(A)$ ist reell mit Determinante 1, also bildet ϕ nach $SL(2, \mathbb{R})$ ab. Um zu zeigen, daß ϕ ein Isomorphismus ist, ist noch die Bijektivität beweisen. Betrachte die Gleichung

$$\phi \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

sie ist nach (13) äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a) \\ \operatorname{Im}(a) \\ \operatorname{Re}(b) \\ \operatorname{Im}(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} \tag{14}$$

Berechnung der Determinante der linken Matrix in (14) ergibt -4 , also hat das Gleichungssystem (14) genau eine Lösung. Für beliebige $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ gibt es also genau ein Paar (a, b) komplexer Zahlen, welche diese Gleichung erfüllen. Daher ist ϕ eine Bijektion, und die vorhergehenden Schlüsse zeigen, daß ϕ also ein Isomorphismus ist

$$\Rightarrow SU(1, 1) \simeq SL(2, \mathbb{R}) \blacksquare$$

b)

Aus der Funktionentheorie ist bekannt, daß die komplexe Möbiustransformation (Cayleyabbildung)

$$z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

ein biholomorpher Isomorphismus ist zwischen der oberen Halbebene $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ und der Einheitskreisscheibe $\mathfrak{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

In Aufgabe 6 wurde nachgewiesen, daß $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ auf \mathfrak{H} transitiv operiert durch

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau \right) \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

$\text{SU}(1, 1)$ operiert auf \mathfrak{D} durch

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \tau \right) \mapsto \frac{a\tau + b}{\bar{b}\tau + \bar{a}} \quad (15)$$

Cayley-Abbildung:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

In a) wurde gezeigt, daß

$$\text{SU}(1, 1) = C\text{SL}(2, \mathbb{R})C^{-1}$$

bzw. für

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\text{SU}(1, 1) = c^{-1}\text{SL}(2, \mathbb{R})c$$

Die Cayley-Matrix konjugiert $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ und $\text{SU}(1, 1)$ hin und zurück. Da nachgewiesen wurde, daß $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ transitiv auf \mathfrak{H} operiert, operiert $\text{SU}(1, 1)$ transitiv auf \mathfrak{D} .

Direkter Nachweis (Ich halte mich nach soviel Rechnen/Schreiben etwas kürzer):

$$g := \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} \begin{pmatrix} 1 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1) \text{ für } z \in \mathfrak{D}$$

(g hat die Struktur wie in (4), ist auf Determinante 1 normiert) und g bildet für $|z| < 1$ 0 auf z ab.

Anmerkung zum Ursprung der Berechnung der Operation in (15):

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ wirkt auf } \tau \in \mathfrak{H} \text{ durch } \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

$$\mathrm{SU}(1,1) \ni \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \text{ wirkt auf } \tau \in \mathfrak{D} \text{ durch } \frac{\alpha\tau + \beta}{\bar{\beta}\tau + \bar{\alpha}},$$

$$\alpha = \frac{a+d}{2} + i\frac{b-c}{2},$$

$$\beta = \frac{d-a}{2} + i\frac{b+c}{2},$$

dabei

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{D} &\longrightarrow \mathfrak{H} \\ z &\longmapsto i\frac{1-z}{1+z} \end{aligned}$$

als konforme Abbildung der Einheitsscheibe \mathfrak{D} auf die obere Halbebene \mathfrak{H} , welche sich mit der Operation verträgt.